ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ TIẾN QUYNH

VỀ MỘT VÀI BẤT ĐẲNG THỨC MỚI KIỂU SIMPSON ĐỐI VỚI HÀM LỒI TỔNG QUÁT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2021

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ TIẾN QUYNH

VỀ MỘT VÀI BẤT ĐẲNG THỨC MỚI KIỂU SIMPSON ĐỐI VỚI HÀM LỒI TỔNG QUÁT

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Nông Quốc Chinh

THÁI NGUYÊN - 2021

Mục lục

Danh sách kí hiệu viết tắt

$\mathbb{N}$	Tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{R}$	Tập hợp các số thực
$\mathbb{N}^*$	Tập hợp các số tự nhiên bỏ đi phần tử 0
$\mathbb{Z}^\alpha$	Tập các số nguyên kiểu α được xác định bởi $\{0^\alpha, \pm 1^\alpha, \pm 2^\alpha, \ldots, \pm n^\alpha, \ldots\}$
$\mathbb{Q}^\alpha$	Tập hợp các số hữu tỉ kiểu α được xác định bởi $\left\{m^\alpha = \left(\frac{p}{q}\right)^\alpha : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$
$\mathbb{J}^\alpha$	Tập hợp các số vô tỉ kiểu α được xác định bởi $\left\{m^\alpha \neq \left(\frac{p}{q}\right)^\alpha : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$
$\mathbb{R}^\alpha$	Tập hợp các số thực kiểu α được xác định bởi $\mathbb{R}^\alpha = \mathbb{Q}^\alpha \cup \mathbb{J}^\alpha$
$\sum_{i=1}^n f(x_i)$	$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$

Mở đầu

Chuyên đề bất đẳng thức là một chuyên đề rộng trong toán học, có rất nhiều bài toán hay và thú vị, có ý nghĩa quan trọng trong Toán học ứng dụng. Ngày nay việc tìm lời giải gần đúng của các bài toán trong các lĩnh vực, đặc biệt kinh tế, địa chất, khí tượng,... trở thành phổ biến nhờ có sự hỗ trợ mạnh mẽ của máy tính. Việc giải các bài toán đó đòi hỏi ta ước lượng đánh giá để thu được lời giải gần đúng cần thiết. Trong trường phổ thông các bài toán bất đẳng thức (hay bài toán so sánh) luôn được khai thác để đưa vào rèn luyện tư duy sáng tạo của học sinh. Đặc biệt trong các kì thi học sinh giỏi các cấp thì chủ đề bất đẳng thức thường được khai thác để đánh giá tư duy của học sinh.

Bất đẳng thức Simpson là bất đẳng thức đánh giá sai số cho ước lượng của trung bình tích phân

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

đây là bất đẳng thức có ý nghĩa. Kết quả này đã được mở rộng cho nhiều lớp hàm xác định trên $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Hiện nay, bất đẳng thức này không những được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu, không chỉ trên tập các số thực mà còn được mở rộng nghiên cứu trên tập phân thứ (fractal sets).

Dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Nông Quốc Chinh, tôi lựa chọn đề tài "Về một vài bất đẳng thức mới kiểu Simpson đối với hàm lồi tổng quát".

Nội dung của luận văn được viết trong hai chương.

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị.

Nội dung chương này trình bày về hàm lồi, một số tính chất và bất đẳng thức liên quan tới hàm lồi, các kết quả này sẽ được phát biểu và chứng minh đối với hàm lồi suy rộng được trình bày trong chương sau. Trong mục 1.2 của chương này, chúng tôi trình bày về bất đẳng thức Simpson. Nội dung chương này được tham khảo từ các tài liệu [1]-[4].

Chương 2. Bất đẳng thức kiểu Simpson đối với hàm lồi tổng quát.

Nội dung của chương này là trình bày về hàm lồi tổng quát xác định trên tập phân thứ. Đưa ra một số bất đẳng thức kiểu Jensen, Hermite - Hadamad đối với hàm lồi tổng quát. Bất đẳng thức Hölder trên tập phân thứ. Phần cuối chương trình bày về một đẳng thức mới kiểu Simpson đối với hàm lồi tổng quát. Kết quả này được nhóm tác giả M. Z. Sarıkaya, H. Budak, and S. Erden đưa ra năm 2019 khi nghiên cứu một số kết quả trên tập phân thứ. Nội dung chương này được tham khảo từ các tài liệu [5] và [6].

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, ngoài sự nỗ lực học hỏi của bản thân, em luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của PGS. TS. Nông Quốc Chinh. Em xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của em đối với những điều thầy đã dành cho em.

Em xin chân thành cảm ơn các thầy cô Khoa Toán – Tin, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học Toán K12 (2018 - 2020), Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện tốt nhất trong suốt quá trình em tham gia học tập tại trường.

Tôi xin cảm ơn Ban Giám hiệu Trường THCS Tân Dân, Khoái Châu, Hưng Yên đã tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè và đồng nghiệp, những người đã động viên, hỗ trợ và tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Thái Nguyên, ngày 18 tháng 01 năm 20201

Tác giả

Lê Tiến Quynh

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này sẽ trình bày về hàm lồi, một số tính chất và bất đẳng thức liên quan tới hàm lồi, các kết quả này sẽ được phát biểu và chứng minh đối với hàm lồi suy rộng được trình bày trong chương sau. Trong mục 1.2 của chương này, chúng tôi trình bày về bất đẳng thức Simpson.

1.1 Hàm lồi và một kết quả liên quan

Cho hai điểm $a, b \in \mathbb{R}$, tập tất các các điểm $x = (1-t)a + tb$ với $0 \leqslant t \leqslant 1$ được gọi là *đoạn thẳng* (đóng) giữa a và b và ký hiệu bằng $[a, b]$. Tập $I \subset \mathbb{R}$ được gọi là *lồi* nếu nó chứa mọi đường thẳng nối hai điểm của nó; nói cách khác, nếu $(1-t)a + tb \in I$ miễn là $a, b \in I, 0 \leqslant t \leqslant 1$.

Định nghĩa 1.1.1. Cho hàm $f : I \to [-\infty, +\infty]$ trên tập lồi $I \subset \mathbb{R}$. Hàm f được gọi là *lồi* nếu với mọi $x_1, x_2 \in I$ và $t \in [0, 1]$ ta có

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

nếu vế phải xác định.

Hàm f được gọi là *lõm* trên I nếu $-f$ là hàm lồi.

Mệnh đề 1.1.2. Giả sử $f : I \to [-\infty, +\infty]$ là hàm lồi. Khi đó, với bất kỳ tập hữu hạn $x_1, \ldots, x_k \in I$ và bất kỳ các số không âm $t_1, \ldots, t_k$ thỏa mãn $t_1 + t_2 + \cdots + t_k = 1$, ta có

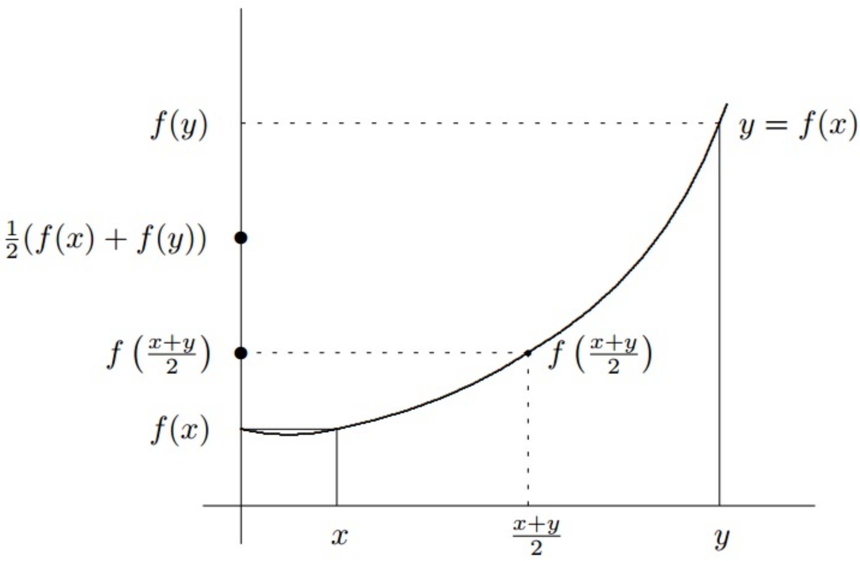
$$f(\sum_{i=1}^{k} t_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} t_i f(x_i).$$

Mệnh đề 1.1.3. Hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm lồi nếu và chỉ nếu thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{1.1}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

(xem hình vẽ dưới đây).



Hàm lồi lần đầu tiên được giới thiệu bởi J.L.W.V.Jensen năm 1905, mặc dù hàm số thỏa mãn điều kiện (1.1) đã được nghiên cứu bởi Hadamard (1893) và Holder (1889). Ví dụ dưới đây sẽ chỉ ra một số hàm lồi cơ bản

Ví dụ 1.1.4. Các hàm số xác được dưới đây là hàm số lồi.

(a) $f(x) = ax + b$ trên $\mathbb{R}$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$

(c) $f(x) = e^{\alpha x}$ trên $\mathbb{R}$ với mọi $\alpha \geqslant 1$ hoặc $\alpha \leqslant 0$

(d) $f(x) = |x|$ trên $\mathbb{R}$

(e) $f(x) = x \log x$ trên $\mathbb{R}_+$

(f) $f(x) = \tan x$ trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Khẳng định. Tổng hữu hạn các hàm lồi là một hàm lồi. Tuy nhiên, tích các hàm lồi chưa chắc lồi. Chẳng hạn như các hàm

$$f(x) = x^2 \quad \text{và} \quad g(x) = e^x$$

là hàm lồi trên $\mathbb{R}$ nhưng tích của chúng

$$h(x) = x^2 e^x$$

không phải là hàm lồi trên $\mathbb{R}$.

Mệnh đề 1.1.5. Giả sử f có đạo hàm trên I. Khi đó f là hàm lồi trên I khi và chỉ khi f' là hàm tăng trên I (Tức là nếu f có đạo hàm cấp 2 thì $f'' > 0$ trên I).

Hệ quả 1.1.6. Cho $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi trên đoạn $[a, b]$. Giả sử $x_i \in [a, b]$, $p_i \geqslant 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ và $P_n := \sum\limits_{i=1}^{n} p_i > 0$. Khi ấy

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leqslant \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i). \tag{1.2}$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp.

Với $n = 2$, ta phải chứng minh

$$f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}\right) \leqslant \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)}{p_1 + p_2}, \tag{1.3}$$

trong đó $x_1, x_2 \in I, p_1, p_2 \geqslant 0$ với $p_1 + p_2 > 0$.

Bây giờ, ta chú ý rằng (1.3) chính là được rút ra từ định nghĩa của hàm lồi với $t = \dfrac{p_1}{p_1 + p_2}$, $x = x_1$ và $y = x_2$. Vậy (1.3) được chứng minh.

Giả sử rằng (1.2) đúng với n, ta chứng minh nó đúng với $n + 1$, tức là ta muốn chứng minh

$$f\left(\frac{1}{P_{n+1}}\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) \leqslant \frac{1}{P_{n+1}}\sum_{i=1}^{n+1} p_i f(x_i) \tag{1.4}$$

với $x_i \in I, p_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n + 1)$ với $P_{n+1} > 0$.

Nếu $p_1 = \cdots = p_n = 0$, thì hiển nhiên (1.4) đúng.

Giả sử rằng $P_n > 0$, khi đó

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{P_{n+1}}\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) &= f\left(\frac{P_n}{P_{n+1}} \cdot \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} x_{n+1}\right) \\ &\leqslant \frac{P_n}{P_{n+1}} f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) + \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} f(x_{n+1}) \end{aligned} \tag{1.5}$$

do f là hàm lồi với $t = \dfrac{P_n}{P_{n+1}}, x = \dfrac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ và $y = x_{n+1}$.

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta được

$$\frac{P_n}{P_{n+1}} f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) + \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} f(x_{n+1}) \leqslant \frac{P_n}{P_{n+1}}\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$$

$$+\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}}f(x_{n+1})$$

$$=\frac{1}{P_{n+1}}+\sum_{i=1}^{n+1}p_if(x_i). \qquad (1.6)$$

Từ (1.5) và (1.6) suy ra (1.5). □

Kết quả tiếp theo là Bất đẳng thức Hermite–Hadamard chỉ ra cận trên và cận dưới của trung bình tích phân. Kết quả này sẽ được trình bày ở chương sau đối với lớp hàm lồi suy rộng trên tập phân thứ.

Mệnh đề 1.1.7 (Bất đẳng thức Hermite–Hadamard)**.** Giả sử f là hàm lồi trên $[a,b]$. Khi đó, nếu f khả tích trên $[a,b]$ thì ta có

$$f(\frac{a+b}{2})\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}. \qquad (1.7)$$

Kết quả tiếp theo là bất đẳng thức Hölder quen thuộc trong lớp các bất đẳng thức sơ cấp. Kết quả này cũng được trình bày ở chương sau đối với các bộ số xác định trong tập phân thứ.

Định lý 1.1.8 (Bất đẳng thức Hölder)**.** Cho hai bộ số $a_1,a_2,\ldots,a_n$ và $b_1,b_2,\ldots,b_n$ là hai bộ n số thực dương và $p>1,$ thỏa mãn $q^{-1}+p^{-1}=1$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (1.8)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_i^p=kb_i^q$ với mọi $i\in\{1,2,,\ldots,n\}$.

Kết quả tiếp theo là bất đẳng thức Hölder ở dạng giải tích, chúng tôi chỉ trình bày kết quả mà không chứng minh.

Định lý 1.1.9 (Bất đẳng thức Hölder dạng giải tích)**.** Giả sử $p,q>1$ thỏa mãn $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, f và g là hai hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$, khi đó

$$\int_a^b|f(x)g(x)|\,dx\leqslant\left(\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (1.9)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tồn tại hai số thực A và B không đồng thời bằng không sao cho

$$A\,|f(x)|^p=B\,|g(x)|^q \quad ,\forall x\in[a,b].$$